

Dr. Ing. Mgr. Andrej Liptaj

Autoreferát dizertačnej práce

**Analytický a unitárny prístup v aplikáciách
elektromagnetických formfaktorov mezónov**

na získanie vedecko–akademickej hodnosti
philosophiae doctor
v odbore doktorandského štúdia 11-24-9
jadrová a subjadrová fyzika

Bratislava, Júl 2010

Dizertačná práca bola vypracovaná v dennej forme doktorandského štúdia na Oddelení teoretickej fyziky Fyzikálneho ústavu Slovenskej akadémie vied, Bratislava.

Predkladateľ: Dr. Ing. Mgr. Andrej Liptaj
Fyzikálny ústav SAV
Dúbravská cesta 9
845 11 Bratislava

Školiteľ: RNDr. Stanislav Dubnička, DrSc.
Fyzikálny ústav SAV
Dúbravská cesta 9
845 11 Bratislava

Oponenti: Doc. RNDr. Fedor Šimkovic, CSc.
Katedra jadrovej fyziky a biofyziky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Mlynská dolina
842 48 Bratislava

RNDr. Ján Nemčík, CSc.
Ústav experimentálnej fyziky SAV
Watsonova 47
040 01 Košice

Prof. Ing. Peter Lichard, DrSc.
Ústav fyziky, Filozoficko-přírodovědecká fakulta
Slezská univerzita v Opavě, Bezručovo nám. 13
746 01 Opava, Česká republika

Autoreferát bol rozoslaný dňa 12.10.2010

Obhajoba dizertačnej práce sa koná dňa 15.11.2010 o 12:30 hod. na Fyzikálnom ústave SAV, Dúbravská cesta 9, 845 11 Bratislava, v miestnosti č. 295 (zasadačka), pred komisiou pre obhajobu dizertačnej práce doktorandského štúdia vymenovanou dňa 11.10.2010 predsedom spoločnej odborovej komisie vo vednom odbore 11–24–9 Jadrová a subjadrová fyzika.

Predseda spoločnej odborovej komisie:

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
Katedra jadrovej fyziky a biofyziky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Mlynská dolina
842 48 Bratislava

Obsah

Úvod	4
1 Ciele, objekty výskumu, nástroje a metódy dizertačnej práce	5
1.1 Ciele dizertačnej práce	5
1.2 Elektromagnetické formfaktory hadrónov	5
1.2.1 Pružný EM formfaktor piónu	6
1.2.2 Prechodový EM formfaktor pseudoskalárnych mezónov	6
1.3 Unitárne a Analytické modely	7
1.3.1 U&A model pre pružný EM formfaktor piónu	7
1.3.2 U&A model pre prechodový EM formfaktor pseudoskalárnych mezónov	9
2 Magnetická anomália μ-mezónu a_μ	10
2.1 Experiment a teória - súčasný stav	10
2.2 Vyhodnotenie $a_\mu^{had,LO}$ za pomoci U&A modelu a získané výsledky	11
3 Predpovedanie širok rozpadu $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$, $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}$ a $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$	13
3.1 Metóda	13
3.2 Výsledky	13
4 Predpoveď priebehu $F_\pi(t)$ v priestoru-podobnej oblasti	14
4.1 Formulácia problému	14
4.2 Riešenie, test konzistentnosti a výsledky	16
Prínos dizertačnej práce a záver	17
Zoznam publikácií a citácií	18
Publikácie a citácie súvisiace s predkladanou dizertačnou prácou	18
Ostatné publikácie a citácie	18
Príspevky na konferenciách	18
Literatúra	19

Úvod

Naše súčasné poznatky o mikrosvete sú obsiahnuté v tzv. Štandardnom Modeli (ŠM) časticovej fyziky. Okrem zjednoteného opisu elektromagnetických (EM) a slabých interakcií ŠM v sebe zahŕňa tiež teóriu silných interakcií, ktorú nazývame kvantová chromodynamika (QCD). Je to kalibračne invariantná dynamická teória založená na lokálnej $SU(3)$ symetrii vo farebnom priestore. Farba pritom zodpovedá náboju silnej interakcie a jej nositeľmi sú kvarky a gluóny (spoločne označované ako „partóny“). Napriek tomu, že táto teória úspešne opisuje veľké množstvo experimentálnych meraní, voľné kvarky a gluóny doposiaľ pozorované neboli. Vždy sú uväznené vo viazaných stavoch, tzv. hadrónoch. Predpokladá sa, že takéto uväznenie je dôsledkom QCD, zatiaľ však o tom nebol podaný rigorózný dôkaz. Viazané stavy partónov totiž spadajú do nízko-energetickej oblasti, kde obvykle používané poruchové výpočty strácajú platnosť. Tieto výpočty naopak nachádzajú svoje uplatnenie pri vysokých energiách, kde je väzbová konštanta teórie (parameter poruchového rozvoja) malá.

Pri opise procesov v ktorých figurujú hadróny je teda nevyhnutné do poruchového výpočtu začleniť aj neporuchový opis partónovej štruktúry hadrónov. Pri pružných alebo prechodových procesoch je možné (v rámci priblíženia jednofotónovej výmeny) takýto opis dosiahnuť použitím formfaktorov. Formfaktory sú komplexné funkcie (spravidla) jednej premennej a síce kvadrátu prenesenej štvorhybnosti q^2 . Hoci ich nevieme vypočítať z prvých princípov QCD, predsa sú známe niektoré ich vlastnosti. Z axiomatickej kvantovej teórie poľa vyplývajú napríklad analytické vlastnosti formfaktorov a formfaktory musia tiež spĺňať tzv. podmienku unitarity, ktorá je dôsledkom unitarity S -matice. V predkladanej práci sa snažíme využiť podmienku unitarity a analytické vlastnosti formfaktorov na vyriešenie aktuálnych otvorených otázok v časticovej fyzike.

V rámci určenia korekcií k magnetickej anomálii miónu sa zaoberáme vyhodnotením vkladov od procesov $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ a $e^+e^- \rightarrow P\gamma$, ($P = \pi^0, \eta, \eta'$), ktoré prispievajú do hadrónovej polarizácie vákua v najnižšom ráde. Za týmto účelom bol skonštruovaný Unitárny a Analytický (U&A) model pre pružný EM formfaktor piónu a tiež U&A model pre prechodový EM formfaktor pseudoskalárnych mezónov. Tieto modely boli nafiťované na experimentálne dáta o zodpovedajúcich formfaktoroch a s ich pomocou boli získané predpovede pre vyššie spomínané vklady.

U&A model tiež využívame na predpovedanie rozpadových širok pseudoskalárnych častíc π^0 , η a η' na dva fotóny. Opierame sa pritom o fakt, že tieto šírky rozpadu je možné dať do súvisu s normalizáciou príslušných prechodových formfaktorov (t.j. s ich hodnotou v nule).

Napokon sa v predkladanej práci zaoberáme predpoveďou priebehu pružného EM formfaktora piónu v priestoru-podobnej oblasti, pričom vychádzame z experimentálnych údajov v času-podobnej oblasti. V tomto prípade sa predpoveď zakladá len na analytických vlastnostiach formfaktora a obsahuje iba malú modelovú závislosť.

Získané výsledky demonštrujú markantný prínos U&A modelu a prístupu vôbec v študovanej problematike (poukážeme na to v závere tohto autoreferátu). Toho dôkazom je aj fakt, že materiál obsiahnutý v predkladanej práci je súčasťou troch CC publikácií a v blízkej budúcnosti očakávame ďalšiu publikáciu (zpracovali sme všetky požiadavky recenzentov). Iná naša práca bola na publikáciu zaslaná a problematika, ktorou sa v rámci dizertačnej práce zaoberáme, bola prezentovaná na viacerých konferenciách s medzinárodnou účasťou (Hadron Structure 2004 v Smoleniciach, HS and QCD 2008 v Gatchine v Rusku, Hadron Structure 2009 v Tatranskej Štrbe, HS and QCD 2010 v Gatchine v Rusku).

1 Ciele, objekty výskumu, nástroje a metódy dizertačnej práce

1.1 Ciele dizertačnej práce

- Poskytnúť teoretické pozadie pre nami riešené otázky: predstaviť Štandardný Model, EM formfaktory, priblížiť problematiku magnetickej anomálie miónu a parciálnych rozpadových širok pre pseudoskalárne mezóny.
- Skonstruovať U&A model pre pružný EM formfaktor piónu a skonstruovať model pre prechodový EM formfaktor pseudoskalárnych mezónov.
- Za pomoci U&A modelu vyhodnotiť vklady $a_\mu^{had,LO}(\pi^+\pi^-)$ a $a_\mu^{had,LO}(P\gamma)$ k magnetickej anomálii miónu. V prípade $a_\mu^{had,LO}(\pi^+\pi^-)$ preukázať výrazné zníženie chyby v porovnaní s inými autormi.
- Využiť skonstruovaný U&A model pre EM formfaktor pseudoskalárnych mezónov na predpovedanie parciálnych širok rozpadu častíc π^0 , η a η' na dva fotóny. Porovnať s tabuľkovými hodnotami [1].
- Predpovedať priebeh pružného EM formfaktora piónu v priestoru-podobnej oblasti opierajúcej sa o jestvujúce experimentálne údaje z času-podobnej oblasti a o analytické vlastnosti formfaktora. Získanú predpoveď porovnať s údajmi v priestoru-podobnej oblasti a s predpoveďami iných modelov inšpirovaných QCD. Taktiež ukázať iba malú modelovú závislosť nami získanej predpovede a vnútornú konzistentnosť nášho prístupu.
- Urobiť záver ohľadom získaných výsledkov a využiteľnosti unitárneho a analytického prístupu vôbec.

1.2 Elektromagnetické formfaktory hadrónov

Základným objektom výskumu v predkladanej práci sú EM formfaktory mezónov (hadróny typu kvark-antikvark). Mezóny, keďže sú zložené z partónov, vykazujú nebudovú elektromagnetickú štruktúru. Vzhľadom na nepoužiteľnosť poruchovej QCD v tejto oblasti, nevieme túto štruktúru popísať z prvých princípov teórie. Preto na jej opis využívame komplexné funkcie jednej komplexnej premennej - formfaktory. Tie hrajú rolu všeobecných (dopredu neznámych) skalárnych koeficientov pri parametrizácii maticového elementu

$$\langle h' | J^\mu(0) | h \rangle = \bar{u}_{h'} \left[\sum_i X_i^\mu(h', h) F_i(t) \right] u_h,$$

ktorý zodpovedá interakcii hadrónu h s virtuálnym fotónom. V predošlom výraze sa využíva najvšeobecnejší rozklad maticového elementu do kovariantov $X_i^\mu(h', h)$, skonstruovaných z hybností a spinorových premenných, pričom sa vychádza z požiadavky rešpektovania správnych Lorentzovských transformačných vlastností. Spravidla je následne možné počet formfaktorov znížiť uvažovaním ďalších obmedzení (napr. Wardovej identity, Diracovej rovnice a pod.). Priebeh formfaktorov $F_i(t)$ je pritom potrebné určiť z experimentov, hoci niektoré ich vlastnosti sú predpovedané aj teoreticky.

Platí, že počet formfaktorov pre opis EM štruktúry danej častice závisí na jej spine. Vektorové častice vyžadujú zavedenie troch formfaktorov, častice so spinom $1/2$ sú popísané dvoma formfaktormi a pri opise skalárnych častíc si vystačíme iba s jedným formfaktormom.

1.2.1 Pružný EM formfaktor piónu

Pružný EM formfaktor piónu je definovaný vzťahmi

$$\langle p_2 | J_\mu^{EM}(0) | p_1 \rangle = eF_\pi(t)(p_1 + p_2)_\mu; \quad t < 0$$

a

$$\langle p_1 p_2 | J_\mu^{EM}(0) | 0 \rangle = eF_\pi(t)(p_2 - p_1)_\mu; \quad t > 0,$$

kde p_1 a p_2 označuje počiatočnú a konečnú štvorhybnosť piónu a prvý výraz sa vzťahuje na oblasť rozptylu (priestoru-podobnú oblasť) a druhý na oblasť anihilácie (času-podobná oblasť). Takto zadaný formfaktor súvisí s účinným prierezom procesu $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ cez vzťah

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-) = \frac{\pi\alpha^2}{3t} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{t}\right)^{\frac{3}{2}} |F_\pi(t)|^2. \quad (1)$$

Známe sú viaceré vlastnosti formfaktora $F_\pi(t)$:

- Asymptotické správanie $F_\pi(t)|_{t \rightarrow \infty} \sim t^{-1}$.
- Norma (hodnota v nule) $F_\pi(0) = 1$.
- Podmienka unitarity $Im [F_\pi(t)] = [A_1^1(t)]^* F_\pi(t) + \sigma(t)$, kde $A_1^1(t)$ je izoskalárna časť P -vlny amplitúdy pružného $\pi\pi$ rozptylu a $\sigma(t)$ v sebe zahŕňa príspevky od vyšších medzistavov (t.j. vyšších než je pružný $\pi\pi$ rozptyl). V oblasti $4m_\pi^2 < t < 16m_\pi^2$ je $\sigma(t) = 0$ a dostávame tzv. pružnú podmienku unitarity.
- $F_\pi(t)$ je analytická funkcia v celej komplexnej rovine, okrem kladnej reálnej osi pre $4m_\pi^2 < t < +\infty$. Na tomto intervale má $F_\pi(t)$ rez, generovaný najnižším bodom vetvenia v $t \equiv t_0 = 4m_\pi^2$ a tiež všetkými vyššími bodmi vetvenia.

Nami predkladaný model má ambíciu rešpektovať tieto vlastnosti, z toho plynie aj jeho názov „unitárny a analytický“.

1.2.2 Prechodový EM formfaktor pseudoskalárnych mezónov

Prechodový EM formfaktor pseudoskalárnych mezónov je definovaný vzťahom

$$\langle P(p)\gamma(k) | J_\mu^{EM}(0) | 0 \rangle = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\nu \varepsilon^\alpha k^\beta F_{\gamma P}(t),$$

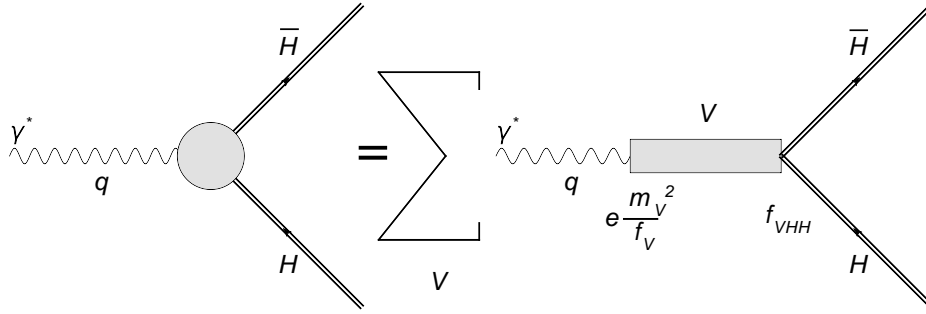
kde p je hybnosť pseudoskalárneho mezónu, k je hybnosť fotónu, ε je polarizačný vektor fotónu. Účinný prierez potom možno vyjadriť nasledovne

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \gamma P) = \frac{\pi\alpha^2}{6} \left(1 - \frac{m_P^2}{t}\right)^3 |F_{\gamma P}(t)|^2.$$

Podobne ako v predošlom prípade, aj pre $F_{\gamma P}(t)$ poznáme viaceré teoreticky predpovedané vlastnosti:

- Asymptotické správanie $F_{\gamma P}(t)|_{t \rightarrow \infty} \sim t^{-1}$.
- Norma (hodnota v nule)

$$F_{\gamma P}(0) = \frac{1}{4\pi^2 f_P} = \frac{2}{\alpha m_P} \sqrt{\frac{\Gamma_{P \rightarrow \gamma\gamma}}{\pi m_P}} \quad (2)$$



Obr. 1: Grafická reprezentácia VMD modelu pre $F_\pi(t)$.

- podmienka unitarity, ktorú sformulujeme v slabšom tvare: $Im[F_{\gamma P}(t)] \neq 0$ pre $m_P^2 < t < +\infty$.
- $F_{\gamma P}(t)$ je analytická funkcia v celej komplexnej rovine, okrem kladnej reálnej osi pre $m_P^2 < t < +\infty$. Na tomto intervale má $F_{\gamma P}(t)$ rez, generovaný najnižším bodom vetvenia v $t \equiv t_0 = m_P^2$ a tiež všetkými vyššími bodmi vetvenia.

Aj pre prípad $F_{\gamma P}(t)$ má nami predkladaný model ambíciu obsahovať vyššie vymenované vlastnosti.

1.3 Unitárne a Analytické modely

U&A model predstavuje základný nástroj využitý v dizertačnej práci, s pomocou ktorého sme získali väčšinu prezentovaných výsledkov. Pri jeho konštrukcii vychádzame z modelu dominantnosti vektorových mezónov (VMD). Vo VMD prístupe sa interakcia fotónu s hadrónom popisuje ako premena fotónu na vektorový mezón s kvantovými číslami fotónu, ktorý následne interaguje s hadrónom. Takýmto spôsobom možno objasniť pozorované rezonančné maximá („píky“) v účinných prierezoch pri elektrón-pozitrónovej anihilácii - zodpovedajú krátko žijúcim vektorovým časticiam, rezonanciam.

VMD model má viacero nedostatkov, ktoré U&A modelom možno odstrániť:

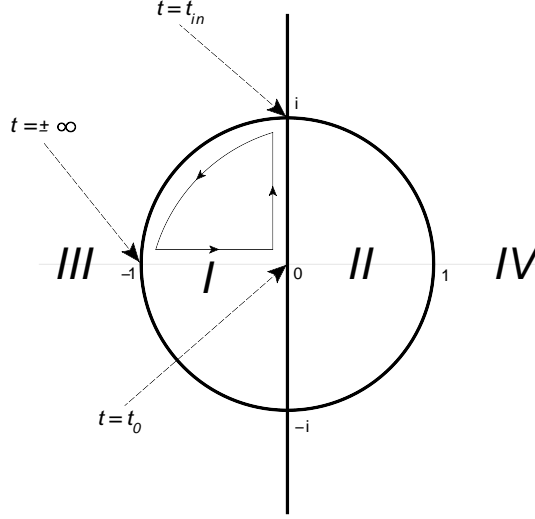
- nezahŕňa nestabilitosť vektorových mezónov,
- nevyhovuje podmienke unitarity,
- nemá správne analytické vlastnosti a
- vo všeobecnom prípade nedáva správne asymptotické správanie formfaktorov.

1.3.1 U&A model pre pružný EM formfaktor piónu

V prípade formfaktoru piónu je predpoveď VMD modelu

$$F_\pi(t) = \sum_{v=\rho,\rho',\rho''} \frac{m_v^2}{m_v^2 - t} \left(\frac{f_{v\pi\pi}}{f_v} \right),$$

jej grafické znázornenie je na Obrázku 1. Väzbové konštanty $f_{v\pi\pi}$ a f_v zodpovedajú interakcii vektorového mezónu s piónom a s fotónom. Do hry vstupujú iba izoskalárne mezóny, keďže piónový formfaktor sa transformuje ako čistý izovektor. Prvým krokom pri tvorbe U&A modelu je zabudovať body vetvenia, ktoré generujú rez. Najnižší bod vetvenia označíme $t \equiv t_0 = 4m_\pi^2$, všetky ostatné



Obr. 2: Rovina W znázornená spolu so štyrmi listami Riemannovej plochy generovanými zobrazením 3. Zároveň je znázornený pohyb, ktorý zodpovedá pohybu od $-\infty$ do $+\infty$ v rovine t po prvom liste Riemannovej plochy.

vyššie body vetvenia nahradíme jedným efektívnym $t = t_{in}$, ktorý považujeme za voľný parameter. Zabudujeme ich vykonaním transformácie

$$t = t_0 - \frac{4(t_{in} - t_0)}{[1/W - W]^2}, \quad (3)$$

ktorá generuje štvorlistú Riemannovu plochu a spomínané body vetvenia sú odmocninového typu. Pre lepšiu názornosť je rovina W spolu s jednotlivými listami Riemannovej plochy znázornená na Obrázku 2. Model potom dostáva tvar

$$F_\pi(W) = \left(\frac{1 - W^2}{1 - W_N^2} \right)^2 \times \\ \times \sum_{v=\rho, \rho', \rho''} \frac{(W_N - W_{v0})(W_N + W_{v0})(W_N - 1/W_{v0})(W_N + 1/W_{v0})}{(W - W_{v0})(W + W_{v0})(W - 1/W_{v0})(W + 1/W_{v0})} (f_{v\pi\pi}/f_v),$$

kde $W_N = W(t)|_{t=0}$ a $W_{v0} = W(t)|_{t=m_v^2}$, pričom index „0“ znamená, že v tomto kroku konštrukcie U&A modelu uvažujeme nulové šírky rozpadu. Prvý člen v súčine udáva asymptotické správanie zdedené z VMD modelu, druhý člen (suma zlomkov) popisuje správanie formfaktora v oblasti rezonancií a blíži sa k reálnej konštante pre $|t| \rightarrow \infty$. Jednotlivé členy v sume možno ďalej upraviť, platí:

- $W_{v0} = -W_{v0}^*$ pre $t_0 < m_v^2 < t_{in}$,
- $W_{v0} = 1/W_{v0}^*$ pre $t_{in} < m_v^2$.

Platnosť týchto rovností možno nahliadnuť aj z Obrázku 2. Ďalším krokom je zavedenie nenulových širok rozpadu $W_{v0} \rightarrow W_v = W(t)|_{t=(m_v - i\frac{\Gamma_v}{2})^2}$ a pridanie násobiaceho člena v tvare $\frac{(W - W_Z)(W_N - W_P)}{(W_N - W_Z)(W - W_P)}$, kde W_Z a W_P sú voľné parametre z intervalu $0 < W_{Z,P} < 1$. Násobiaci člen pridávame za tým účelom, aby sme aproximovali rez, ktorý má $F_\pi(t)$ na druhom, nefyzikálnom liste Riemannovej plochy. Výsledný tvar modelu potom závisí od vzájomných polôh hmotností a prahov, ak predpokladáme

$t_0 < (m_\rho - i\frac{\Gamma_\rho}{2})^2 < t_{in} < (m_{\rho'} - i\frac{\Gamma_{\rho'}}{2})^2, (m_{\rho''} - i\frac{\Gamma_{\rho''}}{2})^2$ máme

$$F_\pi[W(t)] = \left(\frac{1 - W^2}{1 - W_N^2} \right)^2 \frac{(W - W_Z)(W_N - W_P)}{(W_N - W_Z)(W - W_P)} \times$$

$$\times \left[\frac{(W_N - W_\rho)(W_N - W_\rho^*)(W_N - 1/W_\rho)(W_N - 1/W_\rho^*)}{(W - W_\rho)(W - W_\rho^*)(W - 1/W_\rho)(W - 1/W_\rho^*)} (f_{\rho\pi\pi}/f_\rho) + \right.$$

$$\left. + \sum_{v=\rho',\rho''} \frac{(W_N - W_v)(W_N - W_v^*)(W_N + W_v)(W_N + W_v^*)}{(W - W_v)(W - W_v^*)(W + W_v)(W + W_v^*)} (f_{v\pi\pi}/f_v) \right].$$

Takýto model má 10 voľných parametrov: $t_{in}, m_\rho, \Gamma_\rho, m_{\rho'}, \Gamma_{\rho'}, m_{\rho''}, \Gamma_{\rho''}, (f_{\rho\pi\pi}/f_\rho), W_Z$ a W_P . Zvyšné dve veličiny, pomery väzbových konštánt $(f_{\rho'\pi\pi}/f_{\rho'})$ a $(f_{\rho''\pi\pi}/f_{\rho''})$ možno vyjadriť cez $(f_{\rho\pi\pi}/f_\rho)$ ak využijeme znalosť normy formfaktora a správanie sa imaginárnej časti na prahu. Experimentálne údaje obsahujú aj izospin narúšajúci vklad od $\omega(783) \rightarrow \pi^+\pi^-$ a preto pri fitovaní využívame funkčný tvar

$$F_\pi[W(t)] + Re^{i\phi} \frac{m_\omega^2}{m_\omega^2 - t - im_\omega\Gamma_\omega},$$

kde $\phi = \arctan \frac{m_\rho\Gamma_\rho}{m_\rho^2 - m_\omega^2}$ a R je dodatočný, jedenásty voľný parameter.

1.3.2 U&A model pre prechodový EM formfaktor pseudoskalárnych mezónov

U&A model pre prechodový EM formfaktor pseudoskalárnych mezónov $F_{\gamma P}(t)$ je v mnohých ohľadoch veľmi analogický predošlému prípadu. Podáme teda menej podrobný opis s cieľom poukázať na rozdiely.

Prvým rozdielom je uvažovanie tak izoskalárnych ako aj izovektorových mezónov, keďže fotón v konečnom stave sa správa ako superpozícia izoskaláru a izovektora. Pre každý druh častíc zavedieme osobitný efektívny prah.

Druhým rozdielom je spôsob, akým zabudujeme správnu normalizáciu. Jej hodnotu vypočítame za pomoci vzťahu 2 a dosadíme do modelu ako číselnú konštantu. Poznajúc normalizáciu vyjadríme pomery väzbových konštánt $a_i = \frac{f_{i\gamma P}}{f_i}$ pre ω' a ρ' cez ostatné pomery, ktoré zodpovedajú iným časticiam.

Z VMD predpovede

$$F_{\gamma P}(0) = \sum_{s=\omega,\phi,\omega'} \left(\frac{f_{s\gamma P}}{f_s} \right) + \sum_{v=\rho,\rho'} \left(\frac{f_{v\gamma P}}{f_v} \right)$$

po zabudovaní transformácií

$$t = t_0 - \frac{4(t_{in}^s - t_0)}{[1/V - V]^2} \quad \text{a} \quad t = t_0 - \frac{4(t_{in}^v - t_0)}{[1/W - W]^2}$$

teda dostávame

$$F_{\gamma P}(t) = F_{\gamma P}^{I=0}[V(t)] + F_{\gamma P}^{I=1}[W(t)],$$

$$F_{\gamma P}^{I=0}[V(t)] = \left(\frac{1 - V^2}{1 - V_N^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} F_{\gamma P}(0) H(\omega') + [L(\omega) - H(\omega')] a_\omega + [L(\phi) - H(\omega')] a_\phi \right\},$$

$$F_{\gamma P}^{I=1}[W(t)] = \left(\frac{1 - W^2}{1 - W_N^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} F_{\gamma P}(0) H(\rho') + [L(\rho) - H(\rho')] a_\rho \right\},$$

$$L(s) = \frac{(V_N - V_s)(V_N - V_s^*)(V_N - 1/V_s)(V_N - 1/V_s^*)}{(V - V_s)(V - V_s^*)(V - 1/V_s)(V - 1/V_s^*)}, \quad s = \omega, \phi,$$

$$H(\omega') = \frac{(V_N - V_{\omega'})(V_N - V_{\omega'}^*)(V_N + V_{\omega'})(V_N + V_{\omega'}^*)}{(V - V_{\omega'})(V - V_{\omega'}^*)(V + V_{\omega'})(V + V_{\omega'}^*)},$$

$$L(\rho) = \frac{(W_N - W_\rho)(W_N - W_\rho^*)(W_N - 1/W_\rho)(W_N - 1/W_\rho^*)}{(W - W_\rho)(W - W_\rho^*)(W - 1/W_\rho)(W - 1/W_\rho^*)},$$

$$H(\rho') = \frac{(W_N - W_{\rho'})(W_N - W_{\rho'}^*)(W_N + W_{\rho'})(W_N + W_{\rho'}^*)}{(W - W_{\rho'})(W - W_{\rho'}^*)(W + W_{\rho'})(W + W_{\rho'}^*)}.$$

Pri získaní posledného vyjadrenia sme za predpokladaného postavenia hmotností a prahov $m_i^2 < t_{in}^s < m_{\omega'}^2$, $i = \omega, \phi$ a $m_\rho^2 < t_{in}^v < m_{\rho'}^2$ využili platnosť rovností $V_{i0} = -V_{i0}^*$ ($i = \omega, \phi$), $V_{\omega'0} = 1/V_{\omega'0}^*$, $W_{\rho0} = -W_{\rho0}^*$ a $W_{\rho'0} = 1/W_{\rho'0}^*$. Zároveň sme opäť zaviedli nenulové šírky rozpadov $V_{r0} \rightarrow V_r = V(t)|_{t=(m_r - i\frac{\Gamma}{2})^2}$, $r = \omega, \phi, \omega'$ a $W_{r0} \rightarrow W_r = W(t)|_{t=(m_r - i\frac{\Gamma}{2})^2}$, $r = \rho, \rho'$. Model má päť voľných parametrov: t_{in}^s , t_{in}^v , a_ω , a_ϕ a a_ρ .

2 Magnetická anomália μ -mezónu a_μ

Magnetická anomália miónu je z hľadiska teórie aj experimentu zaujímavá veličina. V oboch prípadoch možno stanoviť jej hodnotu veľmi presne a tak preskúmať, či jestvuje rozdiel medzi teoretickou predpoveďou a experimentálnym meraním - to by poukazovalo na „novú fyziku“, ktorú doposiaľ v ŠM nemáme zahrnutú.

Magnetická anomália sa pre leptón l definuje vzťahom

$$a_l = \frac{g_l - 2}{2},$$

kde g_l je gyromagnetický pomer, ktorý dáva do súvisu magnetický moment a spin

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{e}{2m_l} \right) \vec{s}.$$

2.1 Experiment a teória - súčasný stav

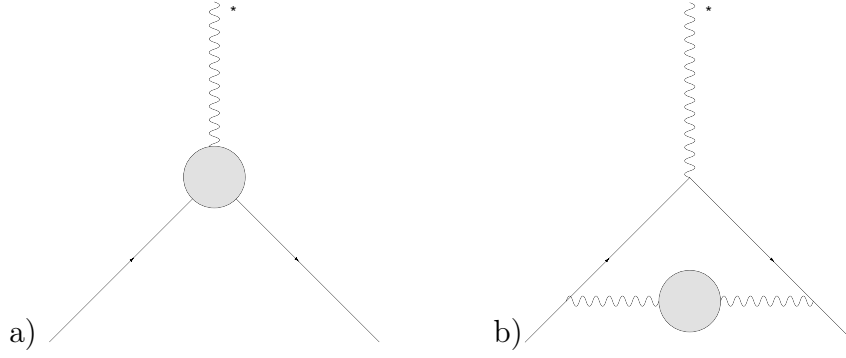
Pri opise súčasného stavu sa opierame o publikáciu [2], kde autori zhrnuli jestvujúce experimentálne a teoretické poznatky.

Experimentálna hodnota a_μ^{exp} je dominantne určená výsledkami $g-2$ kolaborácie z experimentu E821 v Brookhaven National Laboratory [3]. Pri tomto meraní bol využitý zväzok silne polarizovaných miónov ktorý bol zavedený do akumuláčného prstenca. Tam interagoval s magnetickým poľom presnej hodnoty a zároveň sa jednotlivé mióny postupne rozpadávali. Meranou veličinou bol časový priebeh energetického spektra elektrónov, ktoré vznikali pri rozpade miónov. Znalosť tohto spektra a magnetického poľa pôsobiaceho na mióny dovoľuje vypočítať hodnotu magnetickej anomálie a_μ . Ak výsledok experimentu E821 upravíme a zohľadníme aj iné experimentálne merania dostávame

$$a_\mu^{exp} = 116\,592\,093(63) \times 10^{-11}.$$

Teoretická predpoveď vychádza z vyhodnotenia diagramov, ktoré zodpovedajú interakcii miónu s EM poľom (Obrázok 3-a). Vyhodnocujú sa príspevky od EM interakcií, od slabých jadrových síl a tiež príspevky, ktoré plynú z polarizácie vákuua na virtuálne hadrónové stavy

$$a_\mu^{th} = a_\mu^{QED} + a_\mu^{EW} + a_\mu^{had}.$$



Obr. 3: a) Feynmanov diagram interakcie μ -mezónu s externým EM poľom. b) Feynmanov diagram pre hadrónovú polarizáciu vákuua v najnižšom ráde.

Tieto posledné pritom dominantnou mierou prispievajú k celkovej neurčitosti teoretického vyhodnotenia. Naším cieľom je znížiť túto neurčitosť, pričom sa zameriavame na vyhodnotenie príspevkov do hadrónovej polarizácie vákuua v najnižšom ráde (Obrázok 3-b). Výsledná hodnota a_μ^{th} spravidla závisí na tom-ktorom autorovi, na použitých dátach a vybraných modelových predpokladoch (tie vstupujú do hry práve pri a_μ^{had}). Autori [2] uvádzajú hodnotu

$$a_\mu^{th} = 116\,591\,810(210) \times 10^{-11}.$$

Rozdiel teoretickej a experimentálnej hodnoty sa od nuly odlišuje viac, než je jeho neurčitosť. Má teda zmysel zaoberať sa riešením tohto nesúladu (je označovaný ako „g-2 problém“) a snažiť sa o čo najpresnejšie vyhodnotenie a_μ^{th} .

Príspevky k hadrónovej polarizácii najnižšieho rádu možno vyrátať zo vzťahu [4]

$$a_\mu^{had,LO} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds}{s} K(s) R(s), \quad (4)$$

kde

$$K(s) = \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)\frac{s}{m_\mu^2}} \quad \text{a} \quad R(s) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sigma_{LO}(e^+e^- \rightarrow had).$$

Integrál v prvom výraze pritom možno vypočítať od istej hranice (pár GeV) poruchovo, zameriame sa teda iba na vyhodnotenie vkladu v nízko-energetickej oblasti. Zároveň sa obmedzíme iba na príspevky od dvoch procesov, a síce $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ a $e^+e^- \rightarrow P\gamma$, ($P = \pi^0, \eta, \eta'$). Prvý z nich $a_\mu^{had,LO}(\pi^+\pi^-)$ pritom do hodnoty $a_\mu^{had,LO}$ prispieva dominante, no vzhľadom na presnosť experimentálnych meraní má zmysel zaoberať sa aj menšími príspevkami $a_\mu^{had,LO}(P\gamma)$ od pseudoskalárnych mezónov.

2.2 Vyhodnotenie $a_\mu^{had,LO}$ za pomoci U&A modelu a získané výsledky

Pri vyhodnocovaní $a_\mu^{had,LO}(\pi^+\pi^-)$ a $a_\mu^{had,LO}(P\gamma)$ sme sa opierali o dáta, ktoré boli namerané vo viacerých experimentoch (*CLEO*, *NA7*, *Fermilab*, *JINR Dubna*, *OLYA*, *CMD*, *CMD-2*, *SND*, *KLOE*, F_π kolaborácia, *CELLO*, *TPC/2\(\gamma\)*, *IHEP*, *PLUTO*, *L3*).

V prípade $a_\mu^{had,LO}(\pi^+\pi^-)$ sme zvolili 3 hodnoty pre hornú integračnú hranicu vo výraze 4 tak, aby sme mali možnosť porovnania s inými autormi (číselné hodnoty v Tabuľke 1). Podintegračnú funkciu $R(s)$ sme pritom získali z predpovede U&A modelu podľa vzťahu 1. Okrem toho sme integrál vyhodnotili aj bez pomoci modelu priamou integráciou experimentálnych bodov (lichobežníková metóda). Cieľom bolo kvantifikovať zmenšenie chyby, ktoré nám model prináša.

Interval [GeV ²]	$a_\mu^{had,LO}(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-) \times 10^{11}$		
	$4m_\pi^2 < t < 3.24$	$4m_\pi^2 < t < 2.0449$	$4m_\pi^2 < t < 0.8$
Táto práca - integrovanie modelu	$5132.36_{+0.83}^{-0.83}$	$5128.22_{+0.73}^{-0.67}$	$4870.24_{+0.20}^{-0.20}$
Táto práca - integrovanie dát	$5035.33_{+28.32}^{-17.22}$	$5031.22_{+28.94}^{-16.43}$	$4756.77_{+27.55}^{-18.14}$
<i>Davier</i> [5]	5040.00 ± 31.05	x	x
<i>Hagiwara et al.</i> [6]	x	5008.2 ± 28.70	x
<i>Ynduráin et al.</i> [7]	x	x	4715 ± 33.53

Tabuľka 1: Získané hodnoty $a_\mu^{had,LO}(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)$ a porovnanie s inými autormi.

	π^0	η	η'
$a_{\mu,P\gamma}^{had,LO}$	$(53.7162_{+0.366}^{-0.357}) \times 10^{-11}$	$(11.5514_{+0.081}^{-0.072}) \times 10^{-11}$	$(20.692_{+30.185}^{-9.654}) \times 10^{-11}$

Tabuľka 2: Výsledky získané z fitov prechodových formfaktorov pseudoskalárnych mezónov π^0 , η a η' na experimentálne údaje.

V prípade $a_\mu^{had,LO}(P\gamma)$ sme zvolili iba jednu hodnotu pre hornú integračnú hranicu a to tú prostrednú z predošlého prípadu. To nám jednak umožňuje porovnať vklady od procesov $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ a $e^+e^- \rightarrow P\gamma$ a zároveň nezahŕňame do integrácie oblasť slabo pokrytú experimentálnymi bodmi (čo by nastalo pri zvolení najvyššej hodnoty). Experimentálne údaje pre η' mezón sú však aj tak nepostačujúce, v času-podobnej oblasti leží iba zopár bodov. To sa v tomto prípade prejavuje aj na výslednej chybe. Porovnanie našich výsledkov s inými autormi v prípade pseudoskalárnych mezónov nie je k dispozícii.

Na vyhodnotenie chýb v oboch prípadoch používame „štatistickú“ metódu. Celú procedúru fitovania modelu a výpočtu integrálu opakujeme veľa krát s tým, že vždy pozmeníme polohy experimentálnych bodov v rámci ich chýb. Pri tom predpokladáme nekorelované body a Gaussové rozdelenie. Takto dostaneme veľa hodnôt pre každý parameter modelu p_i a tiež pre $a_\mu^{had,LO}$. Z týchto hodnôt vypočítame pre každú veličinu priemer a rozptyl. Keďže optimálna hodnota získaná z fitu na neposunuté body sa spravidla nezhoduje s priemernou hodnotou, uvádzame nesymetrické chyby vo forme

$$p_i = (p_i^{opt})_{+b}^{-a},$$

kde $a = \sigma_i + p_i^{opt} - \bar{p}_i$ a $b = \sigma_i + \bar{p}_i - p_i^{opt}$ (analogicky pre $a_\mu^{had,LO}$).

Dosiahnuté výsledky sú prezentované v Tabuľke 1 (pre $a_\mu^{had,LO}(\pi^+\pi^-)$) a Tabuľke 2 (pre $a_\mu^{had,LO}(P\gamma)$).

Výsledky ohľadom $a_\mu^{had,LO}(\pi^+\pi^-)$ ukazujú, že pri priamom integrovaní experimentálnych údajov dosahujeme neurčitosti porovnateľné s inými autormi. Použitie U&A modelu však vedie k výraznému potlačeniu chyby teoretického vyhodnotenia (viac ako jeden rád) a dokazuje markantný prínos nášho prístupu. Nazdávame sa, že zníženie chyby vyplýva z troch skutočností:

- zabudovanie teoretických poznatkov,
- uvažovanie údajov aj mimo oblasti integrácie,
- „hladký“ priebeh formfaktora predpovedaný U&A modelom (nemáme na mysli hladkosť v matematickom zmysle, očakávame iba, že formfaktor prudko neosciluje na malom intervale).

Všetky vymenované skutočnosti sú modelovo nezávislé a v rámci U&A modelu ich možno spojiť v jeden celok. K zmenšeniu chyby zrejme najviac prispieva najviac posledný bod. Ak má model

výrazne menší počet voľných parametrov než je počet experimentálnych bodov, potom je priebeh modelu určený predovšetkým údajmi s malou chybou. Naopak, do integrálu vyhodnoteného za pomoci priameho integrovania dát prispievajú rovnakou váhou aj body s veľkými chybami, čím zväčšujú výslednú chybu. Navyše sú tieto body systematicky posunuté voči bodom s malou chybou a tak majú vplyv nie len na veľkosť chyby, ale aj posúvajú strednú hodnotu. Nami získaný výsledok má okrem výrazne zmenšenej chyby aj inú strednú hodnotu a to posunutú „dobrým“ smerom, takže teoretická a experimentálna hodnota pre a_μ sa v rámci neurčitostí zhodujú (tu uvažujeme iba vplyv nami vypočítanej hodnoty za predpokladu nemennosti iných vkladov).

S takýmto pohľadom posudzujeme použitie U&A modelu aj pri vyhodnotení $a_\mu^{had,LO}(P\gamma)$. V týchto prípadoch by priama integrácia dát nebola ani dobre možná, vzhľadom na počet a rozmiestnenie bodov. Podľa očakávania (nedostatok údajov v čase-podobnej oblasti) je výsledok pre $a_\mu^{had,LO}(\eta'\gamma)$ zaťažený výraznou chybou. Vzhľadom na presnosť experimentálneho určenia hodnoty a_μ je nami prevedené vyhodnotenie príspevkov od pseudoskalárnych mezónov nanaajvyš dôležité a prínosné. Bez dobrej znalosti všetkých vkladov v rámci teoretického výpočtu nemožno totiž očakávať zosúladienie teoretickej a experimentálnej hodnoty.

3 Predpovedanie širok rozpadu $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$, $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}$ a $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$

3.1 Metóda

U&A model pre $F_{\gamma P}(t)$, ktorý sme skonštruovali a využili v problematike týkajúcej sa magnetickej anomálie miónu, možno s malou úpravou využiť aj pri predpovedaní parciálnych širok rozpadu pseudoskalárnych mezónov π^0 , η a η' na dva fotóny. Ako už bolo v predošlej kapitole povedané, šírku rozpadu $\Gamma_{P \rightarrow \gamma\gamma}$ možno dať do súvisu s normou formfaktora cez vzťah 2. Na tomto mieste využijeme inverzný vzťah

$$\Gamma_{P \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{\pi}{4} \alpha^2 m_p^3 F_{\gamma P}^2(0),$$

kde $F_{\gamma P}(0)$ budeme považovať za voľný parameter a určíme ho fitovaním U&A modelu na experimentálne údaje. Okrem rozšírenia naprogramovaného modelu o jeden voľný parameter metóda vyžaduje aj opätovné prehodnotenie experimentálnych dát.

Vychádzali sme z údajov, ktoré sme mali k dispozícii už z predošle riešenej problematiky. Niektoré z publikovaných dát však nespĺňajú požiadavku správnej normalizácie, ale sú normalizované na jednotku alebo inú konštantu podľa uváženia autorov (tzv. relatívny formfaktor, napr. $F_{\gamma P}(0)=1$). Pri vyhodnocovaní magnetickej anomálie sme mohli takéto údaje renormalizovať využitím výrazu 2 a tabuľkové hodnoty širok rozpadu. V prípade, keď je našim cieľom práve skúmanie parciálnych širok rozpadu a súlad s tabuľkovými hodnotami, nemožno uplatniť analogický postup a je nevyhnutné dané sady údajov zo skúmania vylúčiť.

Spôsob vyhodnotenia chýb bol analogický tomu, ktorý sme opísali v časti 2.2. Situácia bola dokonca o čosi jednoduchšia, keďže vyhodnocovaná veličina súvisí s parametrom modelu priamočiaro (nie je potrebné vyhodnocovať integrál).

Výsledky získané v dizertačnej práci boli nezávisle preverené v rámci našej pracovnej skupiny. Metóda vyhodnotenia aj experimentálne body boli identické, využili sa však iné optimalizačné prostriedky a iný prístup vo vyhodnotení neurčitostí. V nasledujúcej časti sú takéto výsledky označené písmenami „*Alt.*“ (alternatívne vyhodnotenie). To nám dáva možnosť odhadnúť systematickú chybu, ktorá súvisí s vymenovanými skutočnosťami.

3.2 Výsledky

Získané výsledky sú prezentované v Tabuľke 3. V prípade hodnôt $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}$ a $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$ možno konštatovať

$P =$	π^0	η	η'
$F_{\gamma P}(t) _{t=0}$	$0.2050_{+0.0016}^{-0.0016}$	$0.2780_{+0.0087}^{-0.0072}$	$0.3379_{+0.0084}^{-0.0100}$
$\Gamma_{P \rightarrow \gamma\gamma}^{U\&A}$	$4.3230_{+0.0697}^{-0.0713}$ eV	$0.5316_{+0.0333}^{-0.0278}$ keV	$4.1968_{+0.2107}^{-0.2501}$ keV
$\Gamma_{P \rightarrow \gamma\gamma}^{U\&A, Alt.}$	5.28 ± 0.26 eV	0.4283 ± 0.0637 keV	4.1428 ± 0.2740 keV
$\Gamma_{P \rightarrow \gamma\gamma}^{PDG}$	7.744 ± 0.553 eV	0.511 ± 0.028 keV	4.284 ± 0.399 keV
$\Gamma_{P \rightarrow \gamma\gamma}^{PDG} - \Gamma_{P \rightarrow \gamma\gamma}^{U\&A}$	3.420 ± 0.557 eV	-0.020 ± 0.041 keV	0.087 ± 0.460 keV

Tabuľka 3: Výsledky ohľadom $\Gamma_{P \rightarrow \gamma\gamma}$ ($P = \pi^0, \eta, \eta'$) získané U&A modelom pre $F_{\gamma P}(t)$, porovnané s tabuľkovými hodnotami [1].

súlady s tabuľkovými hodnotami, ohľadom $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$ sme dokonca dospeli k menšej neurčitosti než je tabuľková. Pre tieto dve veličiny sme teda nezávislým spôsobom preverili udávané hodnoty a tak dotvorili a doplnili jestvujúce poznatky v tejto oblasti.

Zaujímavý je prípad parciálnej šírky $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$, tu pozorujeme rozpor s tabuľkovou hodnotou a dokonca aj medzi dvoma hodnotami získanými pomocou U&A modelu. Rozdiel vo výsledkoch získaných za pomoci U&A modelu zrejme pochádza z rozdielnych optimalizačných metód, ktoré našli iné body v priestore parametrov. Možno očakávať, že to je aj príčinou rozdielnych chýb. Tie totiž súvisia so strmostou minima χ^2 a tá môže byť rôzna pre dve rôzne minimá. Navyše boli intervaly chýb určované dvoma rôznymi metódami a tento fakt mohol k rozdielu prispieť tiež.

Oba výsledky dosiahnuté s použitím U&A modelu predpovedajú hodnotu významne nižšiu, než je uvedená v tabuľkách. O príčinách tohto nesúlady možno špekulovať. Faktom je, že tabuľková hodnota je dominantne určená priamym meraním dĺžky života neutrálneho piónu [8], čo je úplne iný typ merania, než z ktorého vychádzame my (a než z ktorého sa vychádzalo pri tabuľkových hodnotách pre $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}$ a $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$). Možno sa teda nazdávať, že v jednom alebo v druhom type merania (alebo v oboch) boli podhodnotené neurčitosti. Už pri skúmaní nami použitých bodov voľným okom sa javí ako nepravdepodobné, že by spojitá krivka ktorá ich popisuje mohla v nule nadobudnúť hodnotu, ktorá zodpovedá hodnote z tabuliek. Nami získaný výsledok odhalil teda jestvujúci problém v tejto oblasti a bude zaujímavé podieľať sa na jeho riešení. Pre lepšie pochopenie pozorovaného rozdielu z našej strany by bolo žiadúce získať nové a presnejšie údaje o prechodovom formfaktore neutrálneho piónu

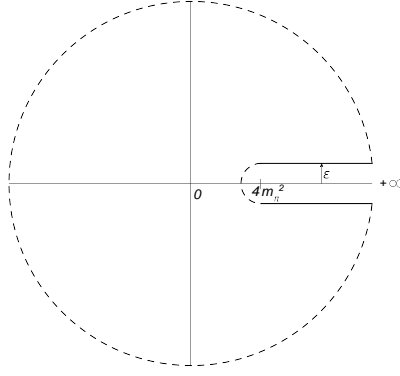
4 Predpoveď priebehu $F_{\pi}(t)$ v priestoru-podobnej oblasti

4.1 Formulácia problému

Experimentálne údaje o pružnom EM formfaktore piónu v priestoru-podobnej oblasti sú do istej miery protirečivé a preto je možné si klásť otázky ohľadom ich spoľahlivosti. To nás motivovalo k využitiu analytických vlastností $F_{\pi}(t)$ pre predpovedanie jeho priebehu v priestoru-podobnej oblasti, pričom vychádzame z údajov, ktoré sú dostupné v času-podobnej oblasti. Tieto dáta boli namerané v elektrón-pozitrónovej anihilácii a sú pomerne presné. Inou motiváciou je tiež možnosť porovnania našej predpovede s inými modelmi inšpirovanými QCD.

Úlohu začíname riešiť zavedením krivky, ktorá ohraničuje analytickú oblasť formfaktora tak, ako je to znázornené na Obrázku 4. Vo vnútri oblasti platí (Cauchyho integrálny vzorec a Cauchyho formula)

$$F_{\pi}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F_{\pi}(t')}{t' - t} dt' \text{ a } \oint F_{\pi}(t') dt' = 0.$$



Obr. 4: Integrovaná krivka ohraničujúca analytickú oblasť v rovine t . Prerušovanou čiarou sú znázornené úseky, ktoré dávajú v limite nekonečného polomeru a v limite $\varepsilon \rightarrow 0$ nulový príspevok, plnou čiarou zase úseky, ktoré dávajú nenulové príspevky.

Formfaktor klesá dosť rýchlo a preto v limite nekonečného polomeru možno vynechať integrál po kružnici. Podobne, v limite nekonečne malého polomeru možno vynechať integrál po polkružnici v okolí $t = 4m_\pi^2$. Využitím podmienky reálnosti $F_\pi(t^*) = [F_\pi(t)]^*$ potom dostávame nasledujúce výrazy

$$F_\pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{+\infty} \frac{\text{Im}[F_\pi(t')]}{t' - t} dt' \text{ a } \int_{4m_\pi^2}^{+\infty} \text{Im}[F_\pi(t')] dt' = 0, \quad (5)$$

pričom hodnotu formfaktora na hornom brehu rezu sme stotožnili s hodnotou na reálnej osi. Ďalej rozdelíme oblasť integrácie na dve

- od $4m_\pi^2$ po $t_1 = (m_\pi + m_\omega)^2$, kde využijeme na určenie $\text{Im}[F_\pi(t)]$ experimentálne údaje a
- od t_1 po $+\infty$ kde využijeme na predpovedanie $\text{Im}[F_\pi(t)]$ parametrizáciu berúc do úvahy všetky známe vlastnosti imaginárnej časti formfaktora.

V prvej oblasti sa oprieme o inverzný vzťah k výrazu pre účinný prierez (pozri vzťah 1) a o pružnú podmienku unitarity, ktorú možno zapísať v tvare $\text{Im}[F_\pi(t)] = \sin[\delta_1^1(t)] |F_\pi(t)|$. Funkcia $\delta_1^1(t)$ pritom označuje fázu amplitúdy A_1^1 (izoskalárna časť P -vlny amplitúdy pružného $\pi\pi$ rozptylu) a jej priebeh poznáme z publikácie [9]. Pri výpočte berieme do úvahy aj $\rho - \omega$ interferenciu a odstraňujeme jej vklad do hodnoty $\text{Im}[F_\pi(t)]$.

V druhej oblasti nad prahom t_1 využijeme nasledujúcu štvorparametrickú funkciu

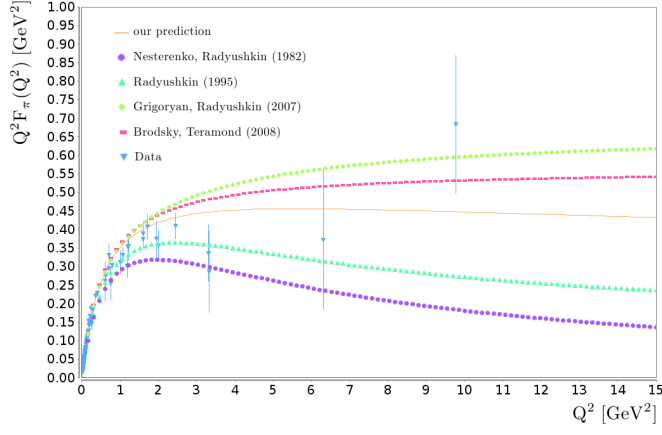
$$\text{Im}[F_\pi(t)] = \pi \frac{64\pi^2 f_\pi^2}{11 - 2n_f/3} \cdot \frac{t_z - t}{(t - C)^2 [\ln(t/\Lambda^2)]^2}, \quad (6)$$

ktorá spĺňa základné požiadavky pre popis imaginárnej časti v tejto oblasti. Na určenie voľných parametrov modelu 6 potrebujeme štyri podmienky. Dve získame zo vzťahov 5

$$1 - \frac{1}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{t_1} \frac{\text{Im}[F_\pi^E(t)]}{t} dt = \frac{64\pi^2 f_\pi^2}{11 - 2n_f/3} \int_{t_1}^{+\infty} \frac{t_z - t}{t(t - C)^2 [\ln(t/\Lambda^2)]^2} dt$$

a

$$\int_{4m_\pi^2}^{t_1} \text{Im}[F_\pi^E(t)] dt = -\pi \frac{64\pi^2 f_\pi^2}{11 - 2n_f/3} \int_{t_1}^{+\infty} \frac{t_z - t}{(t - C)^2 [\ln(t/\Lambda^2)]^2} dt,$$



Obr. 5: Priebek $Q^2 F_\pi(Q^2)$ získaný v tejto práci spolu s predpoveďami iných autorov a s experimentálnymi údajmi.

kde sme písmenom E označili elastickú oblasť $4m_\pi^2 < t < t_1$. Ľavé strany pritom možno číselne vyhodnotiť

$$\int_{4m_\pi^2}^{t_1} \frac{\text{Im} [F_\pi^E(t)]}{t} dt = 2.9690 \quad \text{a} \quad \int_{4m_\pi^2}^{t_1} \text{Im} [F_\pi^E(t)] dt = 1.6658.$$

Ďalšie dve podmienky potom dostaneme z požiadavky spojitosti funkčnej hodnoty a spojitosti derivácie pre $\text{Im} [F_\pi(t)]$ v bode $t = t_1$ (hodnotu a deriváciu označujeme D_1 a D_0). Algebraickými úpravami možno následne dospieť ku konečnej podobe sústavy rovníc

$$0.0549 = \frac{64\pi^2 f_\pi^2}{11 - 2n_f/3} \int_{t_1}^{+\infty} \frac{t_z - t}{t(t - C)^2 [\ln(t/\Lambda^2)]^2} dt, \quad 1.6658 = \frac{-64\pi^3 f_\pi^2}{11 - 2n_f/3} \int_{t_1}^{+\infty} \frac{t_z - t}{(t - C)^2 [\ln(t/\Lambda^2)]^2} dt,$$

$$n_f = \frac{33}{2} - \frac{96\pi^3 f_\pi^2 (t_z - t_1)}{D_0 (t_1 - C)^2 [\ln(t_1/\Lambda^2)]^2}, \quad t_z = t_1 - \frac{1}{\frac{D_1}{D_0} + \frac{2}{t_1 - C} + \frac{2}{t_1 \ln(t_1/\Lambda^2)}}.$$

4.2 Riešenie, test konzistentnosti a výsledky

Riešenie sústavy rovníc sme previedli numericky. Dospeli sme k hodnotám

$$\Lambda = 0.6475 \text{ GeV}, \quad C = -2.0224 \text{ GeV}^2, \quad t_z = 1.8092 \text{ GeV}^2 \quad \text{a} \quad n_f = 11.8232.$$

Ich znalosť nám dovoľuje za pomoci prvého výrazu vo vzťahoch 5 vypočítať hodnotu formfaktora v priestoru-podobnej oblasti. Získanú predpoveď sme porovnali s experimentálnymi údajmi a tiež s výsledkami iných autorov. Využili sme pritom premennú $Q^2 = -t$, ktorá sa v literatúre často vyskytuje. Dosiachnutý popis je znázornený na Obrázku 5. Vidíme, že predpoveď prechádza experimentálnymi bodmi a je v zhode s najnovšou predpoveďou [10], ktorá je založená na vzťahu medzi anti-de-Sitterovým priestorom a teóriou konformného poľa (AdS/CFT korešpondencia).

Okrem samotnej predpovede sme skúmali ešte dve otázky: závislosť našich výsledkov na zvolenom modeli (výraz 6) pre priebek $\text{Im} [F_\pi^E(t)]$ v asymptotickej oblasti a vnútornú konzistentnosť. V prvom prípade sme sa zaujímali o podiel príspevkov od modelu a od dát

$$R(t) = \int_{t_1}^{+\infty} \frac{\text{Im} [F_\pi(t')]}{t' - t} dt' / \int_{4m_\pi^2}^{t_1} \frac{\text{Im} [F_\pi(t')]}{t' - t} dt'$$

a zistili sme, že vklad modelu na nami skúmanom intervale nikdy neprevyšuje 16%. Môžeme teda tvrdiť, že naša predpoveď je do veľkej miery modelovo nezávislá.

V druhom prípade sme využili formulu (Sokhotsky-Plemelj)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - x_0 - i\varepsilon} = P.V. \frac{1}{x - x_0} + i\pi\delta(x - x_0)$$

na predpovedanie priebehu formfaktora na reálnej osi nad prahom t_1 . Výpočet hodnoty ako limity bol nevyhnutný, keďže samotná reálna os leží mimo analytickej oblasti (pozri Obrázok 4). Získaná predpoveď dobre prechádza experimentálnymi bodmi v tejto oblasti, z ktorých sa pri tejto predpovedi vychádzalo. V tomto zmysle je teda náš prístup vnútorne konzistentný.

Prínos dizertačnej práce a záver

V predkladanej dizertačnej práci sme sa zaoberali otvorenými a nanajvyš aktuálnymi otázkami súčasnej časticovej fyziky. Pri ich štúdiu sme sa opierali o EM formfaktory mezónov a náš prístup bol založený na požiadavke unitarity a na analytických vlastnostiach skúmaných formfaktorov. Na takomto základe bol tiež vybudovaný U&A model pre pružný EM formfaktor piónu a pre prechodové formfaktory pseudoskalárnych mezónov.

Tento model sme využili pri vyhodnotení vkladov procesov $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ a $e^+e^- \rightarrow P\gamma$ k magnetickej anomálii miónu v najnižšom ráde hadrónovej vákuovej polarizácie. V prípade piónu sme získali dramatické zníženie chyby oproti iným autorom a tiež posun v strednej hodnote. Tento výsledok približuje teoretickú hodnotu pre magnetickej anomáliu miónu k hodnote získanej experimentálne a odstraňuje rozpor, ktorý bol medzi nimi. V prípade procesu $e^+e^- \rightarrow P\gamma$ nie je porovnanie s inými autormi k dispozícii, avšak vzhľadom na pozitívne výsledky v prípade piónu aj tu očakávame prínos U&A modelu. Hoci vklad týchto príspevkov je menší, ich vyhodnotenie je nemenej dôležité, keďže experimentálna hodnota anomálie je stanovená veľmi presne.

U&A model sme tiež využili pre predpovedanie širok rozpadu $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$, $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}$ a $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$. V prípade posledných dvoch hodnôt sme nezávislým spôsobom preverili tabuľkové hodnoty [1] a pre $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$ dokonca získali menšiu chybu. Náš výsledok ohľadom šírky $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$ nie je konzistentný s hodnotou uvádzanou v tabuľkách. Keďže v tomto prípade sa tabuľkové hodnoty opierajú o úplne iný typ merania, než my (a než tabuľkové hodnoty pre $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}$ a $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$), získaný výsledok zrejme poukazuje na nezrovnalosti v zodpovedajúcich experimentoch (podcenenie chýb). Bude veľmi zaujímavé sledovať budúci vývoj tejto otvorenej otázky a podieľať sa na jej riešení.

Tretou problematikou, ktorou sme sa zaoberali, bolo predpovedanie priebehu pružného EM formfaktora piónu v priestoru-podobnej oblasti. V tomto prípade sme sa snažili o modelovo nezávislý prístup a motiváciou pre nás boli experimentálne údaje v tejto oblasti, ktoré sa zdajú byť nie úplne spoľahlivé. Pri predpovedi sme vychádzali zo známych analytických vlastností formfaktora $F_\pi(t)$ a z experimentálnych údajov v času-podobnej oblasti. Preukázali sme, že náš prístup má iba malú modelovú závislosť a zároveň je vnútorne konzistentný. Získaný výsledok sa dobre zhoduje z najnovšou predpoveďou modelu [10] založeného na AdS/CFT korešpondencii.

Na záver možno teda povedať, že v práci sme predemonštrovali veľký prínos U&A modelu a prístupu vôbec a získali sme cenné výsledky, ktoré posúvajú naše znalosti v daných oblastiach. S problematikou obsiahnutou v práci sme vystúpili na viacerých konferenciách s medzinárodnou účasťou a táto problematika je obsahom viacerých CC publikácií.

Zoznam publikácií a citácií

Publikácie a citácie súvisiace s predkladanou dizertačnou prácou

- A. Z. Dubničková, S. Dubnička, A. Liptaj, G. Pancheri, R. Pekarík, *Contributions of $e^+e^- \rightarrow P(S)\gamma$ processes to muon $g-2$* , Nucl. Phys. Proc. Suppl. 131 (2004) 176-181.
 - citácia:
V.N. Rodionov, *Effects of vacuum polarization in strong magnetic fields with an allowance made for the anomalous magnetic moments of particles*, hep-th/0403282.
- E. Bartoš, S. Dubnička, A. Z. Dubničková, A. Liptaj, *Remarkable suppression of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ contribution error into muon $g-2$* , Nucl. Phys. Proc. Suppl. 198 (2010) 194-198.
- M. Belička, S. Dubnička, A. Z. Dubničková, A. Liptaj, *Model independent pion electromagnetic form factor behavior in the space-like region*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 198 (2010) 143-148.
- M. Belička, A. Z. Dubničková, S. Dubnička, A. Liptaj, *Solid pion electromagnetic form factor and space-like behavior*, Kladné oponentské posudky, všetky navrhované pripomienky zapracované. Očakáva sa publikácia v Phys. Rev. C .
- S. Dubnička, A. Z. Dubničková, A. Liptaj, *Two-photon decay rate of true neutral pseudoscalar mesons from data on their transition form factors*. Zasláné na publikáciu.

Ostatné publikácie a citácie

- V rámci kolaborácie H1 spoluautor viac ako 50tich publikácií. Všetky publikácie boli uverejnené v CC časopisoch a celkový počet citácií je približne osemsto. Publikácie a citácie z priestorových dôvodov neuvádzam, možno ich vyhľadať napr. v internetovej databáze <http://www-spires.fnal.gov/>.

Príspevky na konferenciách

- A. Z. Dubničková, S. Dubnička, A. Liptaj, R. Pekarík, *Why unitary and analytic models of pseudoscalar meson transition form factors*, Hadron Structure 2004, 30. August - 3. September 2004, Smolenický zámok, Slovensko.
- E. Bartoš, S. Dubnička, A. Z. Dubničková, A. Liptaj, *Evaluation of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ contribution to muon anomaly by unitary and analytic model of pion electromagnetic structure*, HS and QCD 2008, 30. Jún - 4. Júl 2008, Gatchina, Rusko.
- E. Bartoš, S. Dubnička, A. Z. Dubničková, A. Liptaj, *Remarkable suppression of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ contribution error into muon $g-2$* , Hadron Structure 2009, 30. August - 3. September 2009, Tatranská Štrba, Slovensko.
- S. Dubnička, A. Z. Dubničková, A. Liptaj, *Model independent pion charge form factor behaviour in space-like region*, Hadron Structure 2009, 30. August - 3. September 2009, Tatranská Štrba, Slovensko.
- S. Dubnička, A. Z. Dubničková, A. Liptaj, *Prediction of the pion form factor behavior in the space-like region with small model dependence*, HS and QCD 2010, 5. Júl - 9. Júl 2010, Gatchina, Rusko.

- S. Dubnička, A. Z. Dubničková, A. Liptaj, *Two-photon decay rate of true neutral pseudoscalar mesons from data on their transition form factors*, HS and QCD 2010, 5. Júl - 9. Júl 2010, Gatchina, Rusko.

Literatúra

- [1] C. Amsler et al. (Particle Data Group), Phys. Lett. B 667, 1 (2008).
- [2] P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, Rev. Mod. Phys 80(2), 633-730(2008).
- [3] G.W. Bennett et. al., Phys. Rev. Lett. 92, 161802 (2004).
- [4] C. Bouchiat and L. Michel, J. Phys. Radium 22 (1961) 121.
- [5] M. Davier, Nucl. Phys. B Proc. Supp. 169 (2007) 288.
- [6] K. Hagiwara, A. D. Martin, D. Nomura and T. Teubner, Phys. Lett. B649 (2007) 173.
- [7] J. F. de Trocóniz and F. J. Ynduráin, Phys. Rev. D71 (2005) 073008.
- [8] H.W. Atherton et al., Phys. Lett. B 158 (1985) 81.
- [9] S. Dubnička, V. A. Mescheryakov and J. Milko, J. Phys. G7 (1981) 605.
- [10] S. J. Brodsky and G. F. de Téramond, *AdS/CFT and Exclusive Processes in QCD*, hep-ph/0709.2072v2 (2007).

Summary

In the dissertation thesis we address several topics related to the domain of particle physics. All of them represent interesting open problems that can be connected to the elastic or transition electromagnetic form factors of mesons, the form factors being the main objects of our interest. Our ambition is to contribute to the solution of these problems and use for that purpose known analytic properties of the form factors and the unitarity condition. These two tools are very powerful in the low energy domain (such as bound states of partons), where the perturbative QCD loses its validity. This is the motivation for construction of the unitary and analytic (U&A) models of studied form factors, that enable us to get the majority of our results.

We use the U&A model to evaluate the contribution of the processes $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ and $e^+e^- \rightarrow P\gamma$, $P = \pi^0, \eta, \eta'$ to the muon magnetic anomaly a_μ in the lowest order of the hadronic vacuum polarization. For the contribution $a_\mu^{had,LO}(\pi^+\pi^-)$ we demonstrate, that the use of the model leads to a dramatic error reduction with respect to the results of other authors. We also get a shift in the central value in the “correct” direction, that brings the theoretical value closer to the experimental one. This results encourages us to use the model also for the evaluation of $a_\mu^{had,LO}(P\gamma)$. These contributions are smaller, however the precision of the experiment makes their evaluation necessary.

We further use the U&A model of the transition form factors of π^0, η and η' mesons to predict the partial decay widths of these particles $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}, \Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}$ and $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$. In this way we make an independent cross check of the PDG table values. We find an agreement in the case of $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}$ and $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$, even a smaller uncertainty for $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$. In the case of $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$ we find a disagreement that points to an interesting problem. We wonder whether it could be related to a very different type of experiment, a direct lifetime measurement, that was predominantly used to get the $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma}$ value (unlike in the case of our evaluation or in the case of the PDG values for $\Gamma_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}$ and $\Gamma_{\eta' \rightarrow \gamma\gamma}$). We are looking forward to analyze this issue and contribute to the solution.

We finally study the behavior of the elastic pion EM form factor in the space-like domain. In this case we aimed to minimize the model dependence and based our approach only on the analytic properties of the form factor and the precise data in the time-like region. Our motivation was the data in the space-like region that, we believe, cannot be fully trusted. Further, we wanted to compare our prediction to other QCD inspired model. We have shown, that the prediction we obtain has only small model dependence. By making a prediction in the time-like region we have also shown that our approach is self-consistent, the prediction describes well the data points that were initially used to get it. Eventually we observed that our prediction is close to the most recent result obtained in the framework of the AdS/CFT theory.

The obtained results allow us to conclude that the unitary and analytic model and approach as such are correct tools to study meson form factors and we have shown, that they have big potential to give important results in several domains of particle physics.